C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 821-823 (24 mars 1969). **Série B**

THERMOCINÉTIQUE. — *Sur la détermination de la résistance thermique transversale d'un cylindre de révolution homogène isotrope avec des conditions aux limites mixtes.* Note (*) de MM. **Michael Yovanovich** et **Jean Coutanceau**, présentée par M. Léopold Escande.

En utilisant une transformation conforme on peut ramener le calcul de la résistance thermique transversale d'un cylindre de révolution à celui de la résistance thermique d'un milieu semi-infini. Une vérification expérimentale par analogie précise la validité de la théorie.

Un cylindre plein d'axe $z'z$, de rayon r_1, infiniment long, constitué d'un matériau homogène et isotrope de conductivité thermique λ est le siège d'une répartition de température due à des conditions aux limites qui dans toute section droite sont les suivantes (*fig.* 1) :

— la température est uniforme sur le secteur E'AE (T_1) ainsi que sur le secteur symétrique par rapport au centre DD' ($T_2 = - T_1$);

— le reste du contour est thermiquement isolé.

La résistance thermique R par unité de longueur est le rapport de la différence des températures T_1 et T_2 à la quantité de chaleur Q qui traverse cette portion de cylindre par unité de temps :

$$R = \frac{2\,T_1}{Q}. \tag{1}$$

Dans le cas où l'angle polaire α_1 du point E est égal à $\pi/2$ il est possible de calculer théoriquement la répartition de température dans une section droite du cylindre et ainsi de déterminer la quantité de chaleur Q et d'atteindre la valeur de la résistance. Cette répartition se présente sous la forme d'une série dont chaque terme est le produit d'une fonction trigonométrique circulaire par une fonction de Bessel [1]. Cette méthode n'est pas applicable au cas où α_1 diffère de $\pi/2$ car alors les conditions aux limites sont mixtes. Nous proposons ci-dessous une solution qui convient pour le calcul de R pourvu que l'angle α_1 ne soit pas supérieur à une certaine limite.

Cette solution consiste d'abord à opérer une transformation conforme entre le plan (r, α) et le plan (u, v) qui fait correspondre à l'intérieur du cercle $r = r_1$ le demi-plan supérieur ($v > 0$). Elle est définie par la relation (2) :

$$w = u + iv = \frac{2\dfrac{r_1}{r}\sin\alpha + i\left[\left(\dfrac{r_1}{r}\right)^2 - 1\right]}{\left(\dfrac{r_1}{r}\right)^2 + 2\dfrac{r_1}{r}\cos\alpha + 1}. \tag{2}$$

Cette transformation conserve dans ce demi-plan l'équation de Laplace ainsi que les conditions aux limites sur la frontière circulaire qui a pour homologue l'axe $u'\omega u$. [Les points transformés des points caractéristiques du contour circulaire sont indiqués par les lettres minuscules correspondantes dans le plan (u, v).]

Les flux de chaleur qui traversent deux lignes conjuguées sont égaux, donc la résistance thermique R cherchée est égale à la résistance thermique R′ qui existe dans le milieu semi-infini ($v > 0$), d'épaisseur unité, de même conductivité λ, la bande qui se projette en ee' étant portée à la température T_1, les bandes projetées en ed et $e'd'$ isolées et le reste du plan $v = 0$ porté à la température $T_2 = -T_1$.

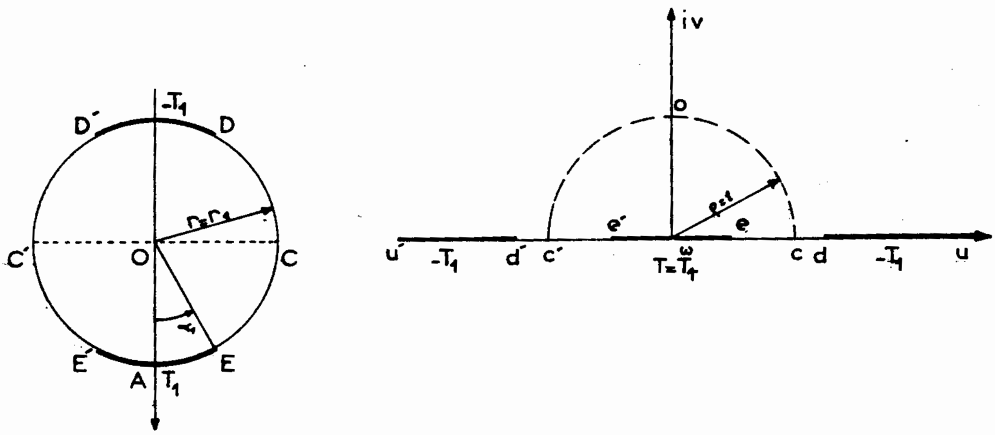

Fig. 1.

Par raison de symétrie le plan diamétral COC′ est une surface isotherme dont la température est $T_0 = 0$ et la résistance transversale R du cylindre est égale au double de la résistance de la moitié du cylindre située d'un côté de l'isotherme COC′. Or cette dernière résistance est égale à celle du domaine homologue du plan (u, v), domaine limité par le segment $c'\omega c$ et le demi-cercle coc'.

La résistance thermique d'un milieu analogue mais limité par un demi-cylindre elliptique isotherme ($T = T_0$) et un demi-plan pour lequel la bande comprise entre les droites focales est isotherme ($T = T_1$), les zones latérales étant thermiquement isolées, est connue [2] :

$$R'' = \frac{1}{\pi\lambda} L\left(\frac{a+b}{c}\right), \tag{3}$$

a, b et c étant respectivement les demi-axes de l'ellipse et la demi-distance focale.

Dans le plan (u, v) il existe une ellipse admettant comme foyers les points e et e' et comme grand axe le segment $c'c$. Son demi-petit axe b

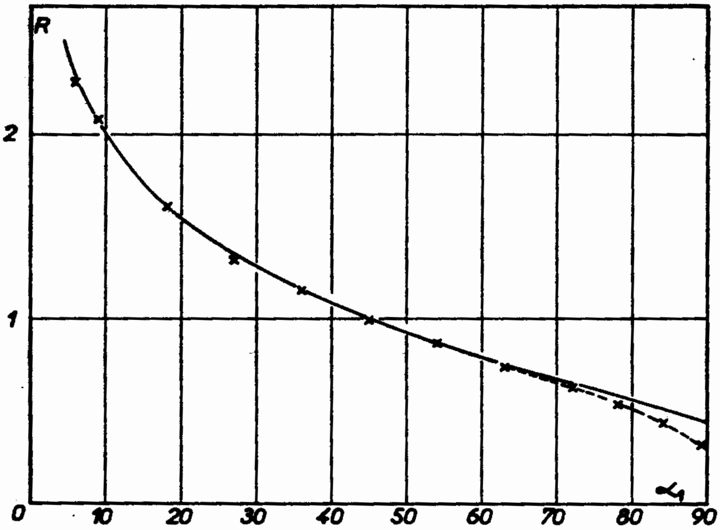

Fig. 2.

est tel que $b^2 = 1 - u_1^2$. S'il diffère peu du demi-grand axe ($a = 1$) le cercle de centre ω et de rayon 1 et l'ellipse peuvent être considérés comme confondus et la résistance R'/2 cherchée est donnée par la relation (3) dans laquelle on fait $a = b = 1$ et $c = u_1$. D'où la valeur de R :

$$R = \frac{2}{\pi\lambda} L \left[\frac{2(1 + \cos\alpha_1)}{\sin\alpha_1} \right]. \tag{4}$$

Des vérifications expérimentales ont été conduites par analogie sur papier Teledeltos. Elles ont très bien confirmé cette relation pour une valeur de α_1 comprise entre 0 et 70°, comme le montre la figure 2 où l'unité de résistance électrique est celle d'un carré découpé dans le papier conducteur et l'unité de résistance thermique la résistance transversale d'un barreau de section carrée pour une longueur égale à l'unité.

(*) Séance du 10 mars 1969.

(1) H. S. Carslaw et J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, p. 188.

(2) M. M. Yovanovich, *Formulation of the concept of thermal resistance in orthogonal curvilinear coordinates*, A. S. M. E. n° 68-HT-182 (à paraître).

(Laboratoire de Thermique,
de l'École Nationale Supérieure
de Mécanique et d'Aérotechnique,
rue Guillaume-VII,
86-*Poitiers, Vienne.)*